TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Jenna Laine

Ramseyn teoria

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Toukokuu 2017

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
LAINE, JENNA: Ramseyn teoria
Pro gradu -tutkielma, 28 s.
Matematiikka
Toukokuu 2017

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa käsitellään Ramseyn teoriaa ja keskitytään erityisesti Ramseyn lauseen todistukseen sekä Ramseyn lukuihin ja niiden arviointiin. Ramseyn teoriassa etsitään riittävän isolta joukolta pienempiä osajoukkoja, joilla on jokin haluttu ominaisuus. Erityisesti mielenkiintoista on myös se, kuinka iso alkuperäisen joukon täytyy olla, jotta haluttu osajoukko voidaan löytää.

Ramseyn teoriaa voidaan havainnollistaa esimerkiksi verkkoteorian avulla, joka on otettu lähtökohdaksi myös tässä tutkielmassa. Ennen Ramseyn teoriaa esitellään verkkoteorian peruskäsitteitä, sekä havainnollistetaan niitä esimerkein. Tämän lisäksi tutustutaan kyyhkyslakkaperiaatteeseen, joka on hyvin hyödyllinen monessa Ramseyn teoriaan liittyvässä ongelmassa. Tutkielmassa käsitellään myös verkkojen värityksiä, jotka ovat keskeinen osa Ramseyn teoriaa.

Ramseyn teoriaa esitellään erilaisten esimerkkien avulla ja määritellään Ramseyn teorian kannalta olennaisia käsitteitä ja käydään läpi muutamia hyödyllisiä apulauseita. Tutkielman merkittävimpänä osana todistetaan Ramseyn lause eri värityksille ja osajoukoille, sekä esitellään tähän mennessä löydettyjä Ramseyn lukuja ja arvioita esimerkkien avulla. Esimerkeissä hyödynnetään erityisesti Ramseyn lauseen todistuksissa saatuja tuloksia etsittäessä ylärajoja Ramseyn luvuille. Koko tutkielman tärkein lähdeteos on Ronald L. Grahamin, Bruce L. Rotschildin ja Joel H. Spencerin kirja Ramsey Theory.

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee Ramseyn teoriaa ja tutkielmassa keskitytään erityisesti Ramseyn lauseen todistukseen sekä Ramseyn lukuihin ja niiden arviointiin. Ramseyn teoriassa etsitään riittävän isolta joukolta pienempiä osajoukkoja, joilla on jokin haluttu ominaisuus. Erityisesti mielenkiintoista on myös se, kuinka iso alkuperäisen joukon täytyy olla, jotta haluttu osajoukko voidaan löytää. Yhdessä tunnetuimmassa Ramseyn teoriaan liittyvässä tapauksessa osoitetaan, että kuuden henkilön joukosta voidaan aina löytää sellaiset kolme henkilöä, joista kaikki joko tuntevat toisensa tai kukaan ei tunne toisiaan.

Ramseyn teoriaa voidaan havainnollistaa esimerkiksi verkkoteorian avulla, joka on otettu lähtökohdaksi myös tässä tutkielmassa. Luvussa kaksi esitellään verkkoteorian peruskäsitteitä, sekä havainnollistetaan niitä esimerkein. Tämän lisäksi tutustutaan kyyhkyslakkaperiaatteeseen, joka on hyvin hyödyllinen monessa Ramseyn teoriaan liittyvässä ongelmassa. Luvun lopussa määritellään verkkojen väritykset, jotka ovat keskeinen osa Ramseyn teoriaa. Lähdeteoksina tässä luvussa on käytetty Reinhard Diestelin kirjaa Graph Theory, Kenneth A. Rossin ja Charles R. Wrightin kirjaa Discrete Mathematics sekä Kenneth H. Rosenin kirjaa Discrete Mathematics and Its Applications.

Luvussa kolme käsitellään itse Ramseyn teoriaa ja aluksi tutustutaan teoriaan erilaisten esimerkkien avulla. Esimerkeissä lähteenä on käytetty Bin Xiongin ja Zhongyi Zhengin kirjaa Graph Theory. Esimerkkien jälkeen määritellään Ramseyn teorian kannalta olennaisia käsitteitä ja käydään läpi muutamia hyödyllisiä apulauseita. Lopuksi todistetaan Ramseyn lause eri värityksille ja osajoukoille. Luvun kolme ja samalla koko tutkielman tärkein lähdeteos on Ronald L. Grahamin, Bruce L. Rotschildin ja Joel H. Spencerin kirja Ramsey Theory.

Tähän mennessä löydettyihin Ramseyn lukuihin ja arvioihin tutustutaan luvussa neljä esimerkkien avulla. Esimerkeissä hyödynnetään erityisesti Ramseyn lauseen todistuksissa saatuja tuloksia etsittäessä ylärajoja Ramseyn luvuille. Lähdeteoksena on käytetty Stanislaw P. Radziszowskin artikkelia Small Ramsey Numbers. Sivulähteenä tutkielmassa on käytetty myös Vera Rostan artikkelia Ramsey Theory Applications.

2 Esitietoja

Ramseyn teoriaan liittyviä tilanteita on mahdollista havainnollistaa esimerkiksi verkkoteorian avulla. Tässä luvussa tutustutaankin verkkoteorian peruskäsitteisiin. Ramseyn teoriassa olennaisessa osassa ovat verkkoihin liitettävät väritykset, joita käydään läpi luvun lopussa.

2.1 Verkkoteoria

Verkkoteoriassa verkot muodostuvat solmuista ja solmujen välillä esiintyvistä särmistä. Solmujen ja särmien merkitsemisen helpottamiseksi jatkon kannalta käydään ensin läpi määritelmä erilaisten joukkojen merkitsemistä varten.

Määritelmä 2.1. Määritellään $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Merkinnällä $[n]^k$, jossa $k > 1$, tarkoitetaan joukon $[n]$ kaikkien k-alkioisten osajoukkojen joukkoa. Vastaavasti voidaan määritellä $[A]^k = \{A' \subseteq A : |A'| = k\}$, jossa $1 < k \leq |A|$.

Havainnollistetaan määritelmää esimerkin avulla.

Esimerkki 2.2. (a) Tarkastellaan joukkoa $[4]^k$, kun $k \in \{2, 3\}$. Jos $k = 2$, niin $[4]^2 = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\big\}$. Jos taas $k = 3$, niin $[4]^3 = \big\{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\big\}$

(b) Olkoon $A = \{a, b, c, d, e\}$. Tällöin $[A]^3 = \big\{\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{b,c,d\}, \{b,c,e\}, \{c,d,e\}, \{a,c,d\}, \{a,c,e\}, \{a,d,e\}, \{b,d,e\}\big\}$.

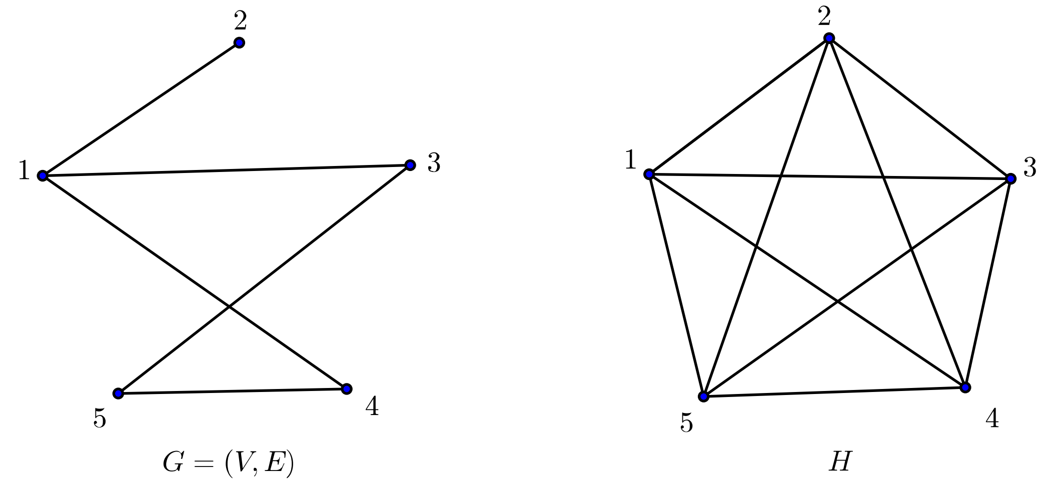
Hakasulkumerkintää pystytään hyödyntämään nyt verkon solmujen ja särmien merkitsemisessä. Käydään seuraavaksi läpi määritelmä verkon ominaisuuksista.

Määritelmä 2.3. Olkoon V äärellinen joukko ja $E \subseteq [V]^2$. Tällöin paria (V, E) sanotaan verkoksi ja merkitään $G = (V, E)$. Joukon V alkioita kutsutaan verkon G solmuiksi ja joukon E alkioita särmiksi. Verkkoa $G = (V, E)$, jossa $|V| = n$ ja $E = [V]^2$ sanotaan täydelliseksi n-solmuiseksi verkoksi K_n. Solmua w sanotaan solmun v naapuriksi, jos $\{v, w\} \in E$. Lukua $\delta v \in \mathbb{N}$, missä $\delta v = |\{w \in V : \{v, w\} \in E\}|$ sanotaan solmun v asteeksi.

Huomautus 2.4. Solmua v sanotaan parittomaksi, mikäli sen aste δv on pariton ja vastaavasti parilliseksi, mikäli sen aste δv on parillinen.

Seuraavan esimerkin avulla havainnollistetaan määritelmää. Verkkoja voidaan kuvata myös merkitsemällä solmuja pisteillä ja särmiä pisteiden välisillä janoilla kuten kuvissa 2.1 on havainnollistettu seuraavan esimerkin tilanteita vastaavia verkkoja.

Esimerkki 2.5. (a) Olkoon $G = (V, E)$ verkko, jossa $V = [5]$ ja $E = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\big\}$. Nyt esimerkiksi $\delta 1 = 3$ ja $\delta 2 = 1$. Verkkoa on havinnollistettu kuvassa 2.1.



Kuva 2.1: Verkot G ja H

(b) Olkoon $H = (V, E)$ verkko, jossa $V = [5]$ ja $E = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\big\}$. Tällöin verkko H on K_5 ja $\delta v = 4$ kaikilla $v \in [5]$. Verkon H kaikki kärjet ovat siis parillisia. Verkkoa on havinnollistettu kuvassa 2.1.

Seuraavissa kahdessa lauseessa 2.6 ja 2.8 on hyödynnetty teosta Discrete Mathematics and Its Applications [4]. Todistetaan seuraavaksi lause liittyen solmujen asteisiin.

Lause 2.6. *Verkon $G = (V, E)$ solmujen $v \in V$ asteille pätee $\sum_{v \in V} \delta v = 2|E|$.*

Todistus. Tarkasteltaessa kaikkien verkon G solmujen $v_1, \ldots, v_n$, $n \in \mathbb{N}$ asteiden summaa $\sum_{v \in V} \delta v$ huomataan, että yhden särmän lisääminen verkkoon G suurentaa summaa $\sum_{v \in V} \delta v$ kahdella, koska jokaiseen särmään liittyy aina kaksi solmua. Näin ollen $\sum_{v \in V} \delta v = 2|E|$. □

Edellä olevaa lausetta voidaan hyödyntää esimerkiksi tutkittaessa verkon särmien lukumäärää, kuten seuraavassa esimerkissä tehdään.

Esimerkki 2.7. Osoitetaan, että verkolla $G = (V, E)$, jolle $|V| = 10$, pätee, että $|E| \leq 45$. Huomataan, että verkon särmien lukumäärä on suurin silloin, kun $\delta v = 9$ kaikilla $v \in V$. Tällöin lauseen 2.6 nojalla

$$\begin{aligned} 2|E| &= \sum_{v \in V} \delta v \\ 2|E| &= 10 \cdot 9 = 90 \Leftrightarrow |E| = 45. \end{aligned}$$

Siis $|E| \leq 45$.

Koska verkon solmujen asteiden summa on lauseen 2.6 nojalla aina parillinen, saadaan seuraava tulos.

Seuraus 2.8. Verkon parittomien solmujen lukumäärä on parillinen.

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$ ja $V = V_1 + V_2$, missä V_1 on verkon G parillisten solmujen joukko ja V_2 verkon G parittomien solmujen joukko. Selvästi nyt $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Lauseen 2.6 perusteella tiedetään, että $\sum_{v \in V} \delta v = 2|E|$. Voidaan siis päätellä, että

$$2|E| = \sum_{v \in V_1} \delta v + \sum_{v \in V_2} \delta v.$$

Nyt $\sum_{v \in V_1} \delta v = 2m$ jollain $m \in \mathbb{N}$, sillä joukon V_1 määritelmän nojalla jokaisen solmun $v \in V_1$ aste on parillinen. Koska myös summa $\sum_{v \in V_1} \delta v + \sum_{v \in V_2} \delta v$ on parillinen, on myös summan $\sum_{v \in V_2} \delta v$ oltava parillinen. Tämä on mahdollista vain, jos joukon V_2 alkioiden lukumäärä on parillinen, sillä joukon V_2 määritelmän perusteella jokaisen alkion $v \in V_2$ aste on pariton. □

2.2 Kyyhkyslakkaperiaate

Tarkasteltaessa esimerkiksi verkon solmujen naapureiden lukumäärää, voidaan hyödyntää kombinatoriikasta tuttua kyyhkyslakkaperiaatetta. Käydään ensin läpi kyyhkyslakkaperiaatteen yksinkertaisempi muoto.

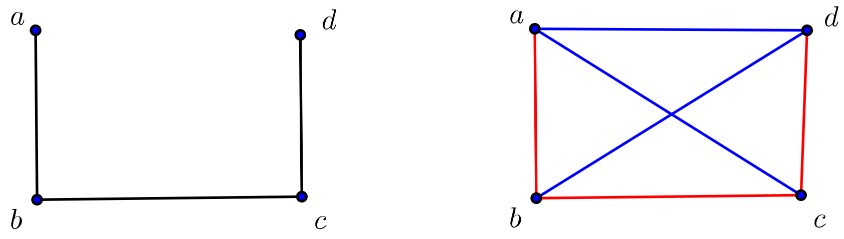
Lause 2.9 (Kyyhkyslakkaperiaate)**.** *Olkoon A ja B äärellisiä joukkoja siten, että $|A| = n + 1$ ja $|B| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $f : A \longrightarrow B$. Tällöin on olemassa $b \in B$ siten, että $|f^{-1}(b)| > 1$.*

Todistus. Olkoon $B = \{b_1, ..., b_n\}$ ja $A_i = f^{-1}(b_i)$, jolloin $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että kaikilla $b \in B$ pätee $|f^{-1}(b)| \leq 1$. Koska $|f^{-1}(b_i)| \leq 1$, saadaan $|A_i| \leq 1$ ja edelleen $|A| = \left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right| \leq n \cdot 1 = n$. Tämä on ristiriita, sillä $|A| = n + 1$. On siis olemassa $b \in B$ siten, että $|f^{-1}(b)| > 1$. □

Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla siis lajiteltaessa esimerkiksi kyyhkysiä lokeroihin, on johonkin lokeroon sijoitettava useampi kyyhkynen, mikäli kyyhkysiä on enemmän kuin lokeroita. Käydään seuraavaksi läpi myös kyyhkyslakkaperiaatteen yleisempi muoto, jota hyödynnetään myöhemmin Ramseyn lauseen todistuksessa luvussa 3.

Lause 2.10. *Olkoon A ja B äärellisiä joukkoja siten, että $|A| = q_1 + \ldots + q_n - n + 1$ ja $|B| = n$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in [n]$. Olkoon $f : A \longrightarrow B$. Tällöin on olemassa $b_i \in B$, $i \in [n]$ siten, että $|f^{-1}(b_i)| \geq q_i$.*

Todistus. Olkoon $A_i = f^{-1}(b_i)$, jolloin $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että kaikilla $b_i \in B$ pätee $|f^{-1}(b_i)| < q_i$. Koska $|f^{-1}(b_i)| \in \mathbb{N}$, voidaan päätellä, että



Kuva 2.2: Kättelyt

$|f^{-1}(b_i)| \leq q_i - 1$. Nyt $|A_i| \leq q_i - 1$, joten

$$|A| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \leq (q_1 - 1) + \ldots + (q_n - 1) = q_1 + \ldots + q_n - n.$$

Tämä on ristiriita, sillä oletuksen nojalla $|A| = q_1 + \ldots + q_n - n + 1$. Siis on olemassa $b_i \in B$, $i \in [n]$ siten, että $|f^{-1}(b_i)| \geq q_i$. □

Kyyhkyslakkaperiaatetta voidaan hyödyntää useissa käytännön esimerkeissä. Käydään seuraavaksi läpi yksi tällainen tilanne havainnollistamaan kyyhkyslakkaperiaatetta.

Esimerkki 2.11. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla voidaan todistaa, että joukosta, jossa on n henkilöä, löytyy vähintään kaksi henkilöä, jotka ovat kätelleet yhtä montaa henkilöä. Yhden henkilön kättelemien henkilöiden lukumäärä on vähintään 0 ja korkeintaan $n - 1$. Huomataan, että 0 ja $n - 1$ ovat toisensa poissulkevia, sillä jos joku ei ole kätellyt ketään, ei kukaan ole voinut kätellä kaikkia. Näin ollen mahdollisia vaihtoehtoja kätellyiden henkilöiden lukumäärällä on $n - 1$ kappaletta, joten kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla vähintään kaksi ihmistä on kätellyt yhtä montaa henkilöä.

2.3 Verkon väritys

Edellisen kaltaista esimerkkiä voitaisiin havainnollistaa kuvalla, jossa verkon solmut vastaavat henkilöitä ja solmujen välillä on särmä, mikäli henkilöt ovat kätelleet toisiaan. Toisaalta voimme havainnollistaa tilannetta verkolla G, joka on K_n ja jossa solmujen väliset särmät on väritetty punaiseksi, mikäli solmuja vastaavat henkilöt ovat kätelleet tai vastaavasti siniseksi, mikäli henkilöt eivät ole kätelleet. Selvennetään asiaa esimerkin avulla.

Esimerkki 2.12. Henkilöistä a, b, c, d vain a ja b, b ja c sekä c ja d ovat kätelleet toisiaan. Tilannetta voidaan havainnollistaa esimerkiksi kuvan 2.2 kaltaisilla verkoilla.

Verkkojen särmiin voidaan siis liittää jokin väri. Seuraavan määritelmän mukaiset väritykset ovat olennainen osa Ramseyn teoriassa.

Määritelmä 2.13. Joukon S *r-väritys* on kuvaus $\chi : S \to [r]$. Kun $s \in S$, sanotaan että $\chi(s)$ on alkion s väri. Joukko $T \subseteq S$ on *yksivärinen*, jos χ on vakio joukossa T, eli toisin on olemassa $i \in [r]$ siten, että kaikilla $t \in T$ pätee $\chi(t) = i$. Sanotaan, että joukko T on tällöin väriltään i.

Huomautus 2.14. Edellisen kohdan määritelmää voidaan laajentaa hyväksymällä r-värityksen χ maalijoukoksi myös mikä tahansa joukko A, jolle $|A| = r$.

Havainnollistetaan värityksen määritelmää tarkastelemalla esimerkin 2.12 tilannetta vielä tarkemmin verkon avulla ja liittämällä siihen väritys.

Esimerkki 2.15. Olkoon $G = (V, E)$ verkko, jossa $V = \{a, b, c, d\}$ ja $E = [V]^2$, ja olkoon $\chi : E \to \{p, s\}$ siten, että

$$\chi(\{x, y\}) = \begin{cases} p, & \text{kun} \quad \{x, y\} \in \big\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\big\} \\ s, & \text{kun} \quad \{x, y\} \in \big\{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}\big\}. \end{cases}$$

Kuvaus χ on siis joukon E 2-väritys, sillä $|\{p, s\}| = 2$. Joukko $\big\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\big\}$ on selvästi yksivärinen kuvauksen χ määritelmän nojalla ja väriltään p. Olkoon $C = \{a, b, c\}$. Tällöin joukko $[C]^2$ ei ole yksivärinen, sillä esimerkiksi $\{a, b\}, \{a, c\} \in [C]^2$, mutta $\chi(\{a, b\}) = p$ ja $\chi(\{a, c\}) = s$.

3 Ramseyn teoria

Ramseyn teoriaan liittyvissä lauseissa osoitetaan, kuinka jaettaessa riittävän iso joukko alkioita satunnaisesti äärelliseen määrään pienempiä osajoukkoja, löydetään vähintään yksi osajoukko, jolla on jokin haluttu ominaisuus [6]. Erityisesti voidaan tutkia sitä, minkä kokoinen alkuperäisen joukon tulisi vähintään olla, jotta tällainen halutun ominaisuuden sisältävä osajoukko varmasti löytyy. Ramseyn teoriaa voidaan soveltaa eri matematiikan osa-alueilla, mutta tässä tutkielmassa keskitymme verkkoteoriaan etsimällä yksivärisiä osajoukkoja verkolta, johon on liitetty jokin r-väritys. Tunnetuin Ramseyn teorian erikoistapaus esitellään seuraavassa esimerkissä.

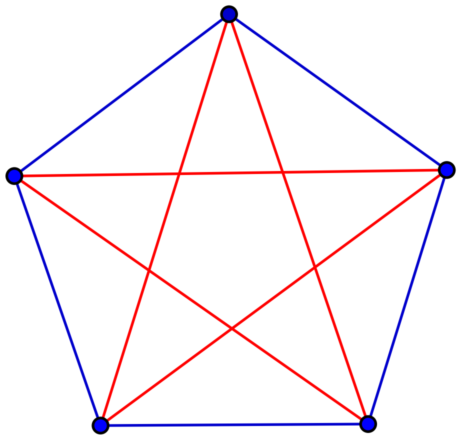
Esimerkki 3.1. Mistä tahansa kuuden henkilön joukosta voidaan löytää vähintään kolme henkilöä, jotka tuntevat toisensa, tai kolme henkilöä, jotka eivät tunne toisiaan. Merkitään henkilöitä a, b, c, d, e, f. Jos a ja b tuntevat toisensa, niin a tuntee henkilön b ja b tuntee henkilön a. Kyseessä on siis symmetrinen relaatio. Voimme havainnollistaa tilannetta verkkoteorian avulla. Olkoon $G = (V, E)$ verkko, jossa $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla voidaan olettaa, että a joko tuntee vähintään kolme henkilöä tai a ei tunne vähintään kolmea henkilöä. Oletetaan ensin, että a tuntee henkilöt b, c, d, eli $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\} \in E$. Nyt jos on olemassa $x, y \in \{b, c, d\}$ siten, että $\{x, y\} \in E$, olemme löytäneet kolmen hengen joukon a, x, y, jossa kaikki tuntevat toisensa. Jos taas $\{x, y\} \notin E$ kaikilla $x, y \in \{b, c, d\}$, on $\{b, c, d\}$ etsitty joukko ja väite on todistettu. Oletetaan sitten, että a ei tunne henkilöitä b, c, d, eli $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\} \notin E$. Jos on olemassa $x, y \in \{b, c, d\}$ siten, että $\{x, y\} \notin E$, on $\{a, x, y\}$ etsitty joukko ja väite on todistettu. Jos taas $\{x, y\} \in E$ kaikilla $x, y \in \{b, c, d\}$, on $\{b, c, d\}$ etsitty joukko ja väite pätee.

Esimerkin tilannetta voitaisiin havainnollistaa myös 2-värityksen avulla, jossa verkon punainen särmä merkitsee tuntemista ja sininen särmä ei-tuntemista. Jokaiselta kuuden solmun verkolta löydetään siis aina sellaiset kolme solmua, jotka muodostavat yksivärisen K_3 verkon. Tätä tulosta voidaan hyödyntää esimerkiksi seuraavien tapausten todistamisessa.

Esimerkki 3.2. Kaksi lentoyhtiötä liikennöi kymmenen kaupungin välisiä reittejä siten, että jokaista kahden kaupungin välistä suoraa menopaluureittiä liikennöi vain toinen lentoyhtiöistä. Osoitetaan, että tällöin toisella lentoyhtiöllä on olemassa kaksi rengasreittiä siten, että molemmilla reiteillä on pariton määrä kaupunkeja ja reiteillä on korkeintaan yksi yhteinen kaupunki. Väite voidaan todistaa verkkoteorian ja verkolle liitetyn 2-värityksen avulla. Muotoillaan väite nyt matemaattisesti. Määritellään ensin, että $A^* = \big\{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{b-1}, a_b\}, \{a_b, a_1\}\big\}$, kun $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_b\}$ ja $b \in \mathbb{N}$. Olkoon sitten $G = (V, E)$ verkko, jolle $|V| = 10$ ja $E = [V]^2$ ja olkoon $\chi : [10]^2 \to [2]$ joukon $[10]^2$ 2-väritys. Osoitetaan, että tällöin on olemassa alkio $i \in [2]$ ja joukot $T, S \subseteq V$ siten, että seuraavat ehdot toteutuvat:

(i) $T^* \cap S^* = \emptyset$

(ii) $\chi(\{u, v\}) = i$ kaikilla $\{u, v\} \in (T^* \cup S^*)$



Kuva 3.1: Verkko $G' = (W, [W]^2)$

(iii) $|T| = 2n + 1$ ja $|S| = 2m + 1$ jollain $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$.

Merkitään $V = \{v_1, \ldots, v_{10}\}$. Esimerkin 3.1 nojalla on olemassa sellainen kolmen solmun joukko $X \subseteq V$ siten, että X^* on yksivärinen. Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan olettaa, että $X = \{v_8, v_9, v_{10}\}$ ja $\chi(X^*) = 1$. Edelleen esimerkin 3.1 nojalla voidaan päätellä, että joukosta $V \setminus X$ löydetään kolmen solmun joukko $Y \subseteq V$ siten, että Y^* on yksivärinen. Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan jälleen olettaa, että $Y = \{v_5, v_6, v_7\}$. Tällöin selvästi $X^* \cap Y^* = \emptyset$ ja $|X| = |Y| = 3$, joten ehdot (i) ja (iii) toteutuvat. Jos $\chi(Y^*) = 1$, niin myös ehto (ii) toteutuu. Oletetaan sitten, että $\chi(Y^*) = 2$. Olkoon $K_{X,Y} = \big\{\{x, y\} : x \in X \text{ ja } y \in Y\big\}$, jolloin$|K_{X,Y}| = 9$. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla voidaan löytää viisi samanväristä särmää $\{x, y\} \in K_{X,Y}$. Tästä voidaan edelleen päätellä, että on olemassa solmu $x \in X$ siten, että särmät $\{x, y_1\}, \{x, y_2\} \in K_{X,Y}$ ovat samanvärisiä. Olkoot nämä särmät $\{v_8, v_6\}$ ja $\{v_8, v_7\}$ ja $\chi(\{v_8, v_6\}) = \chi(\{v_8, v_7\}) = 2$. Olkoon sitten $Z = \{v_6, v_7, v_8\}$, jolloin $\chi(Z^*) = 2$. Tutkitaan seuraavaksi joukkoa $W = \{v_1, \ldots, v_5\}$. Jos on olemassa $i \in [2]$ ja joukko $W' \subseteq W$ siten, että $|W'| = 3$ ja $\chi(W'^*) = i$, niin selvästi yhdessä joukot W' ja W'' toteuttavat ehdot (i)-(iii), kun $W'' \in \{X, Z\}$. Mikäli tällaista joukkoa W' ei löydy, on joukon W solmujen välillä olevien särmien värityksen oltava kuvan 3.1 mukainen, sillä yhdenkin särmän värin muuttaminen muodostaisi tällaisen joukon W'. Uudelleen järjestelemällä joukon W alkiot voidaan siis todeta, että on olemassa $i \in [2]$ siten, että $\chi(W^*) = i$, jolloin joukko W yhdessä joukon $W'' \in \{X, Z\}$ toteuttaa ehdot (i)-(iii) ja väite on todistettu.

Esimerkki 3.3. Jaetaan luvut $1, 2, 3, 4, 5$ satunnaisesti kahteen joukkoon A ja B, ja osoitetaan, että on olemassa sellaiset luvut $x, y \in C$, missä $x > y$ ja $C \in \{A, B\}$ siten, että $x - y \in C$. Havainnollistetaan tilannetta verkolla $G = (V, E)$, jossa $V = [6]$ ja $E = [V]^2$. Kaikille solmuille $x, y \in V$, $x > y$ pätee $1 \leq x - y \leq 5$. Määritellään joukon $[V]^2$ 2-väritys $\chi : [V]^2 \to [2]$ siten, että

$$\chi(\{x, y\}) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x - y \in A \\ 2, & \text{kun} \quad x - y \in B \end{cases}$$

Olemme muodostaneet siis täydellisen 6-solmuisen verkon K_6, johon on liitetty 2-väritys. Esimerkin 3.1 nojalla löydetään solmut $V' = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$, $v_i < v_j$, kun $i < j$ siten, että $[V']^2$ on yksivärinen. Olkoon $a = v_3 - v_1, b = v_3 - v_2$ ja $c = v_2 - v_1$. Nyt värityksen χ määritelmän perusteella $a, b, c \in C$, missä $C \in \{A, B\}$ ja $a - b = (v_3 - v_1) - (v_3 - v_2) = v_2 - v_1 = c$, joten $a - b \in C$.

3.1 Peruskäsitteet

Käydään seuraavaksi läpi muutamia peruskäsitteitä ja apulauseita, joiden avulla voimme käsitellä itse Ramseyn teoriaa. Seuraavan määritelmän avulla voimme esittää esimerkin 3.1 väitteen matemaattisesti.

Määritelmä 3.4. Merkitään $n \to (l)$, jos millä tahansa joukon $[n]^2$ 2-värityksellä $\chi : [n]^2 \to [2]$ on olemassa joukko $T \subseteq [n], |T| = l$ siten, että $[T]^2$ on yksivärinen. Kun $[T]^2$ on yksivärinen, $|T| = l$, sanotaan, että $[T]^2$ on yksivärinen K_l.

Esimerkin 3.1 väittämää voidaan siis merkitä $6 \to (3)$. Mikäli tilannetta ajatellaan verkkoteorian avulla, löydetään siis jokaiselta kuusi solmua sisältävältä verkolta jokaisella 2-värityksellä sellaiset kolme solmua, joiden väliset särmät ovat samanvärisiä. Määritelmässä 3.4 keskitytään vain 2-värityksiin, mutta määritelmää voidaan laajentaa koskemaan myös r-värityksiä seuraavalla tavalla.

Määritelmä 3.5. Merkitään $n \to (l_1, ..., l_r)$, jos seuraava ehto toteutuu: jokaiselle joukon $[n]^2$ r-väritykselle $\chi : [n]^2 \to [r]$ on olemassa $i \in [r]$ ja joukko $T \subseteq [n]$, siten, että $|T| = l_i$ ja $[T]^2$ on väriltään i.

Yksivärisen joukon koko voi siis vaihdella väristä riippuen. Jos kuitenkin $l_1 = \cdots = l_r = l$, niin merkitään $n \to (l)_r$. Toisin sanoen jokaisella joukon $[n]^2$ r-värityksellä $\chi : [n]^2 \to [r]$ löytyy yksivärinen joukko $[T]^2$, jolle $T \subseteq [n]$ ja $|T| = l$. Merkinnässä $n \to (l)$ on $r = 2$. Näin ollen väitteet $n \to (l)$, $n \to (l)_2$ ja $n \to (l, l)$ ovat yhtäpitäviä.

Aikaisemmin todettiin, että $6 \to (3)$, eli jokaisella joukon $[6]^2$ 2-värityksellä löydetään yksivärinen K_3. Selvästi tällöin löydetään myös yksivärinen verkko K_2, jolloin $6 \to (2)$. Toisaalta vaikuttaa myös selvältä, että mikäli alkuperäiseen verkkoon lisätään yksi solmu, pätee tällöinkin $7 \to (3)$. Todistetaan seuraavaksi muutama määritelmään 3.5 liittyvä trivialiteetti.

Apulause 3.6. (i) Jos $l_i' \leq l_i$, kun $i \in [r]$ ja $n \to (l_1, ..., l_r)$, niin $n \to (l_1', ..., l_r')$.

(ii) Jos $m \geq n$ ja $n \longrightarrow (l_1, ..., l_r)$, niin $m \longrightarrow (l_1, ..., l_r)$.

Todistus. (i) Oletetaan siis, että $l_i' \leq l_i$, kun $i \in [r]$ ja $n \longrightarrow (l_1, ..., l_r)$. Olkoon $\chi : [n]^2 \longrightarrow [r]$. Oletuksen perusteella on olemassa $i \in [r]$ ja $T \subseteq [n]$ siten, että $|T| = l_i$ ja T on väriltään i. Valitaan joukko $T' \subseteq T$ siten, että $|T'| = l_i'$. Selvästi T' on edelleen väriltään i. Siis jokaisella r-värityksellä $\chi : [n]^2 \longrightarrow [r]$ löydetään joukko $T' \subseteq [n]$ siten, että $|T'| = l_i'$ ja T' on väriltään i, joten $n \longrightarrow (l_1', ..., l_r')$.

(ii) Oletetaan siis, että $m \geq n$ ja $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$. Olkoon $\chi : [m]^2 \longrightarrow [r]$. Määritellään väritys $\chi' : [n]^2 \longrightarrow [r]$ siten, että $\chi'(\{u, v\}) = \chi(\{u, v\})$ kaikilla $\{u, v\} \in [n]^2$. Tämä on mahdollista, sillä $[n]^2 \subseteq [m]^2$, koska $m \geq n$. Sovelletaan oletusta $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$ väritykselle χ'. On siis olemassa $i \in [r]$ ja $T \subseteq [n]$ siten, että $|T| = l_i$ ja T on väriltään i. Edelleen $T \subseteq [m]$ eli jokaisella r-värityksellä χ löytyy joukko $T \subseteq [m]$ siten, että $|T| = l_i$ ja T on väriltään i, joten $m \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$.

□

Havainnollistetaan näitä tapauksia vielä esimerkin avulla.

Esimerkki 3.7. Esimerkissä 3.1 todistettiin, että $6 \longrightarrow (3, 3)$. 6 hengen joukosta löytyy siis 3 henkilöä, jotka tuntevat kaikki toisensa tai kukaan ei tunne toisiaan. Selvästi voimme tarkastella näistä vain kahta henkilöä, jotka edelleen joko tuntevat tai eivät tunne toisiaan, eli $6 \longrightarrow (2, 2)$. Toisaalta voimme myös lisätä joukkoon yhden henkilön, mikä ei vaikuta muiden henkilöiden suhteisiin, eli $7 \longrightarrow (3, 3)$.

Vaikuttaa selvältä, että määritelmän 3.5 nuolimerkinnän $n \longrightarrow (l_1, l_2)$ paikkansapitävyyden kannalta voimme vaihtaa värit keskenään merkintää vastaavassa 2-värityksessä $\chi : [n]^2 \longrightarrow [2]$, jolloin väite edelleen pitää paikkansa, kunhan nuolimerkintää muutetaan vastaavasti, eli $n \longrightarrow (l_2, l_1)$. Tämä voidaan tehdä myös r-värityksille, joissa $r > 2$. Asian todistamisessa hyödynnetään permutaatiota, joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 3.8. Permutaatio σ on bijektio $\sigma : [r] \longrightarrow [r]$. Alkio σi on alkion i kuva, eikä merkinnässä siis käytetä sulkuja.

Ennen värien permutointia mahdollistavaa apulausetta käydään esimerkin avulla läpi yksittäistapaus, jota voidaan hyödyntää myöhemmässä todistuksessa.

Esimerkki 3.9. Oletetaan, että $n \longrightarrow (5, 3, 4)$ ja osoitetaan, että tällöin $n \longrightarrow (3, 4, 5)$. Olkoon $\chi : [n]^2 \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ väitettä $n \longrightarrow (3, 4, 5)$ vastaava kuvaus. Määritellään kuvaus $\chi_\sigma : [n]^2 \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ siten, että

$$\chi_\sigma(\{u, v\}) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad \chi(\{u, v\}) = 3 \\ 2, & \text{kun} \quad \chi(\{u, v\}) = 1 \\ 3, & \text{kun} \quad \chi(\{u, v\}) = 2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Sovelletaan oletusta $n \longrightarrow (5,3,4)$ kuvaukselle χ_σ. On siis olemassa joukko $T \subseteq [n]$ siten, että yksi seuraavista on totta:

(a) $|T| = 5$, joukon T väri kuvauksella χ_σ on 1, eli väri kuvauksella χ on 3.

(b) $|T| = 3$, joukon T väri kuvauksella χ_σ on 2, eli väri kuvauksella χ on 1.

(c) $|T| = 4$, joukon T väri kuvauksella χ_σ on 3, eli väri kuvauksella χ on 2.

Näin ollen väite $n \longrightarrow (3,4,5)$ siis pätee.

Yleisen tapauksen todistusta varten kuvaukselle χ_σ olisi löydyttävä kuitenkin formaalimpi määritelmä. Olkoon siis σ joukon [3] permutaatio, eli bijektio $\sigma : [3] \to [3]$. Saadaan

$$\sigma r = \begin{cases} 2, & \text{kun} \quad r = 1 \\ 3, & \text{kun} \quad r = 2 \\ 1, & \text{kun} \quad r = 3. \end{cases}$$

Tällöin kohdan (3.1) kuvaus χ_σ saadaan muotoon

$$\chi_\sigma(\{u,v\}) = \begin{cases} \sigma 3, & \text{kun} \quad \chi(\{u,v\}) = 3 \\ \sigma 1, & \text{kun} \quad \chi(\{u,v\}) = 1 \\ \sigma 2, & \text{kun} \quad \chi(\{u,v\}) = 2. \end{cases}$$

Huomataan, että $\chi_\sigma(\{u,v\}) = \sigma \circ \chi(\{u,v\})$. Tarkastellaan vielä nuolimerkinnän $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$ lukujen $l_i \in [r]$ järjestyksen vaihtumista tässä esimerkissä. Määritellään luvut $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{N}$ oletuksen $n \longrightarrow (5,3,4)$ mukaisesti, eli $l_1 = 5, l_2 = 3$ ja $l_3 = 4$. Huomataan, että $n \longrightarrow (3,4,5) \Leftrightarrow n \longrightarrow (l_{\sigma 1}, l_{\sigma 2}, l_{\sigma 3})$.

Nyt voimme muotoilla esimerkin 3.9 tapauksen yleisessä muodossa.

Apulause 3.10. (i) Olkoon σ joukon $[r]$ permutaatio. Tällöin $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$ joss $n \longrightarrow (l_{\sigma 1}, \ldots, l_{\sigma r})$.

(ii) $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$ joss $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r, 2)$. Erityisesti $l_1 \longrightarrow (l_1, 2)$.

Todistus. (i) Olkoon kuvaus σ siis joukon $[r]$ permutaatio. Oletetaan, että $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$ ja osoitetaan, että tällöin $n \longrightarrow (l_{\sigma 1}, \ldots, l_{\sigma r})$. Merkitään $l'_i = l_{\sigma i}$, kun $i \in [r]$, jolloin $l_i = l'_{\sigma^{-1} i} = l'_j$. Olkoon χ väitettä $n \longrightarrow (l_{\sigma 1}, \ldots, l_{\sigma r})$ koskeva väritys $\chi : [n]^2 \to [r]$. Määritellään esimerkin 3.9 mukaisesti väritys $\chi_\sigma : [n]^2 \to [r]$ merkitsemällä $\chi_\sigma(\{u,v\}) = \sigma \circ \chi(\{u,v\})$. Sovelletaan oletusta $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$ väritykselle χ_σ. On siis olemassa joukko $T \subseteq [n]$ ja $i \in [r]$

siten, että $|T| = l_i$ ja joukon T väri värityksellä χ_σ on i. Olkoon $j = \sigma^{-1}i$. Koska $l_i = l'_j$, saadaan $|T| = l'_j$ ja $\chi(\{u,v\}) = \sigma^{-1}\chi_\sigma(\{u,v\}) = \sigma^{-1}i = j$ jokaisella $\{u,v\} \in [T]^2$. Siis $n \to (l'_1, ..., l'_i)$ eli $n \to (l_{\sigma 1}, ..., l_{\sigma r})$. Toiseen suuntaan todistus tehdään vastaavasti.

(ii) Oletetaan ensin, että $n \to (l_1, ..., l_r)$. Olkoon $\chi : [n]^2 \to [r+1]$. Jos on olemassa $\{u,v\} \in [n]^2$ siten, että $\chi(\{u,v\}) = r+1$, niin tällöin $T = \{u,v\}$ on väriltään $r+1$ ja $|T| = 2$ ja määritelmän 3.5 ehto toteutuu. Jos taas kaikilla $\{u,v\} \in [n]^2$ pätee, että $\chi(\{u,v\}) \neq r+1$, niin määritellään kuvaus $\chi' : [n]^2 \to [r]$ asettamalla $\chi'(\{u,v\}) = \chi(\{u,v\})$ kaikilla $\{u,v\} \in [n]^2$. Nyt oletuksen perusteella on olemassa $i \in [r]$ ja $T \subseteq [n]$ siten, että $|T| = l_i$ ja T on väriltään i. Jälleen määritelmän 3.5 ehto siis toteutuu, joten $n \to (l_1, ..., l_r, 2)$. Oletetaan sitten, että $n \to (l_1, ..., l_r, l_{r+1})$, missä $r+1 = 2$. Olkoon $\chi : [n]^2 \to [r]$ ja määritellään kuvaus $\chi' : [n]^2 \to [r+1]$ asettamalla $\chi'(\{u,v\}) = \chi(\{u,v\})$ kaikilla $\{u,v\} \in [n]^2$. Nyt oletuksen perusteella on olemassa $i \in [r+1]$ ja $T \subseteq [n]$ siten, että $|T| = l_i$ ja T on väriltään i värityksellä χ'. Nyt $i \neq r+1$, sillä $r+1 \notin ran(\chi')$. Siis $i \in [r]$ ja $|T| = l_i$ ja T on väriltään i. Määritelmän 3.5 ehto siis toteutuu, joten $n \to (l_1, ..., l_r)$ ja väite on todistettu.

□

Jos siis $m \geq n$ ja $n \to (l_1, ..., l_r)$, niin apulauseen 3.6 kohdan (ii) nojalla saadaan, että $m \to (l_1, ..., l_r)$. Solmujen lukumäärää voidaan siis kasvattaa mielivaltaisen suureksi, mutta usein olemmekin kiinnostuneita pienimmästä mahdollisesta luvusta n, jolla $n \to (l_1, ..., l_r)$. Määritellään seuraavaksi funktio, jonka kuva on tämä haluttu pienin luku.

3.2 Ramseyn lause joukolla $[n]^2$

Määritelmä 3.11. Ramseyn funktio $R(l_1, \dots, l_r)$ kertoo pienimmän luvun $n \in \mathbb{N}$, jolla $n \to (l_1, ..., l_r)$. Tätä lukua n kutsutaan Ramseyn luvuksi. Merkitään $R(l;r) = R(l_1, \dots, l_r)$, kun $l_1 = \cdots = l_r = l$ ja $R(l) = R(l;2) = R(l,l)$.

Seuraavaksi todistetaan, että tällainen luku n todella aina löytyy. Kyseessä on Ramseyn lause, joka on yksi tämän työn merkittävimmistä lauseista. Selvyyden vuoksi todistetaan lause ensin tapauksessa $r = 2$ kahdella eri tavalla, jonka jälkeen voimme hyödyntää todistuksia tapauksen $r > 2$ todistamisessa.

3.2.1 Ramseyn lause 2-värityksillä

Lause 3.12 (Ramseyn lause). *Funktio R on hyvin määritelty: kaikille $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $n \to (l_1, ..., l_r)$.*

Todistus 1. Todistetaan lause induktiolla. Apulauseen 3.10 kohdan (ii) nojalla $R(l,2) = R(2,l) = l$. Oletetaan, että luvut $R(l_1, l_2 - 1)$ ja $R(l_1 - 1, l_2)$ ovat olemassa.

Väite. $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \to (l_1, l_2)$

Olkoon χ joukon $[n]^2$ 2-väritys, kun $n = R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2)$. Valitaan satunnainen $x \in [n]$. Olkoon

$$\begin{aligned} X_1 &= \{y \in [n] : y \neq x,\ \chi(x, y) = 1\}, \\ X_2 &= \{y \in [n] : y \neq x,\ \chi(x, y) = 2\} \\ &= [n] \backslash (X_1 \cup \{x\}) \end{aligned}$$

Tällöin $|X_1| + |X_2| = n - 1$. Tästä seuraa, että joko

(i) $|X_1| \geq R(l_1 - 1, l_2)$ tai

(ii) $|X_2| \geq R(l_1, l_2 - 1)$,

sillä jos olisi $|X_1| < R(l_1 - 1, l_2)$ ja $|X_2| < R(l_1, l_2 - 1)$ eli $|X_1| \leq R(l_1 - 1, l_2) - 1$ ja $|X_2| \leq R(l_1, l_2 - 1) - 1$, niin saataisiin

$$\begin{aligned} |X_1| + |X_2| &\leq R(l_1 - 1, l_2) - 1 + R(l_1, l_2 - 1) - 1 \\ &\leq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1) - 2 \\ &\leq n - 2, \end{aligned}$$

Tämä on ristiriita, sillä $|X_1| + |X_2| = n - 1$. Oletetaan nyt, että (i) pätee. Oletuksen nojalla $R(l_1 - 1, l_2)$ on olemassa. Koska nyt $|X_1| \geq R(l_1 - 1, l_2)$, niin huomautuksen 3.6 kohdan (ii) nojalla voidaan löytää joko joukko $T \subseteq X_1$ siten, että $|T| = l_2$ ja $[T]^2$ on väriltään 2, jolloin määritelmän 3.5 ehto täytty tai on olemassa joukko S, $S \subseteq X_1$ siten, että $|S| = l_1 - 1$ ja $[S]^2$ on väriltään 1. Olkoon $S^* = S \cup \{x\}$. Koska $S \subseteq X_1$, kaikki alkiot $\{x, s\}$ ovat väriltään 1, joten $[S^*]^2$ on yksivärinen, $|S^*| = l_1$. Jälleen määritelmän 3.5 ehto täyttyy, joten $n \longrightarrow (l_1, l_2)$ ja väite on todistettu. Tapaus (ii) todistetaan vastaavasti. □

Huomautus 3.13. Edellisessä todistuksessa 1 saatu tulos $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \longrightarrow (l_1, l_2)$ on yhtäpitävä väitteen $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \geq R(l_1, l_2)$ kanssa apulauseen 3.6 kohdan (ii) nojalla.

Ennen toista tapaa todistaa lause 3.12, esitetään todistusta varten eräs apulause, jossa tarkastellaan haluttua muotoa olevien lukujen ominaisuuksia.

Apulause 3.14. Olkoon $l \in \mathbb{N}$. Jos luvuille $x_i \in \mathbb{N}$, $i \leq 2l - 1$ pätee $x_1 \geq 2^{2l-1} - 1$ ja $x_{i+1} \geq (x_i - 1)/2$, niin tällöin $x_i \geq 2^{2l-i} - 1 \geq 1$.

Todistus. Todistetaan apulause induktiolla luvun i suhteen. Oletuksen nojalla väite pätee selvästi, kun $i = 1$, sillä $x_1 \geq 2^{2l-1} - 1$. Oletetaan, että väite pätee, kun $i = k - 1$, eli $x_{k-1} \geq 2^{2l-k+1} - 1$. Nyt oletuksen nojalla $x_k \geq (x_{k-1} - 1)/2$. Induktio-oletuksen nojalla saadaan

$$x_k \geq \frac{2^{2l-k+1} - 1 - 1}{2} = \frac{2^{2l-k+1} - 2}{2} = 2^{2l-k} - 1,$$

joten $x_i \geq 2^{2l-i} - 1$. Huomataan vielä, että kun $i = 2l - 1$, niin

$$x_i \geq 2^{2l-(2l-1)} - 1 = 2^{2l-2l+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1,$$

joten väite on todistettu. □

Nyt voimme käydä läpi vaihtoehtoisen todistuksen lauseelle 3.12.

Todistus 2. Riittää osoittaa, että $2^{2l-1} - 1 \to (l)$, missä $l = max\{l_1, l_2\}$, sillä tällöin

$$2^{2l-1} - 1 \to (l) \Rightarrow 2^{2l-1} - 1 \to (l_1, l_2).$$

Olkoon S_1 joukko, jolle $|S_1| \geq 2^{2l-1} - 1$ ja χ joukon $[S_1]^2$ 2-väritys. Olkoon x_1 satunnaisesti valittu alkio joukosta S_1. Määritellään joukot S_i ja alkiot $x_i \in S_i$ seuraavasti, kun $2 \leq i \leq 2l - 1$:

(i) Kun S_i on valittu, valitaan satunnainen $x_i \in S_i$

(ii) Olkoon $T_c = \{u \in S_i : \chi(x_i, u) = c\}$, missä $c \in \{1, 2\}$. Valitaan $a \in \{1, 2\}$ siten, että $|T_a| \geq |T_b|$ molemmilla $b \in \{1, 2\}$ ja asetetaan $S_{i+1} = T_a$.

Koska $|T_1| + |T_2| = |S_i| - 1$, niin $|S_{i+1}| \geq (|S_i| - 1)/2$. Nyt $|S_1| \geq 2^{2l-1} - 1$, joten apulauseen 3.14 nojalla voidaan päätellä, että $|S_i| \geq 2^{2l-i} - 1 \geq 1$,kun $i \leq 2l - 1$. Joukko S_i on siis epätyhjä niin kauan, kun $i \leq 2l - 1$, joten voidaan valita alkiot $x_1, \ldots, x_{2l-1}$. Määritellään uusi väritys $\chi^* : \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\} \to \{1, 2\}$. Kuvaus χ^* kertoo alkion $\{x_i, y\}$ värin, kun $y \in S_{i+1}$, koska joukkojen S_{i+1} määritelmän nojalla on olemassa $j \in \{1, 2\}$ siten, että $\chi(x_i, y) = j$ kaikilla $y \in S_{i+1}$. Asetetaan siis $\chi^*(x_i) = j$. Koska väritys χ^* jakaa $2l - 1$ solmua kahteen ryhmään, voidaan löytää l pistettä $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ siten, että $\chi^*(x_{i_s}) = j$, kun $1 \leq s \leq l$. Olkoon $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\}$, missä $1 \leq s < t \leq l$. Tällöin $x_{i_t} \in S_{i_t} \subseteq S_{i_s+1}$ ja $\chi(\{x_{i_s}, x_{i_t}\}) = j$ kaikilla $x_{i_s}, x_{i_t} \in A$ ja selvästi $|A| = l$, joten A on haluttu yksivärinen joukko. □

3.2.2 Ramseyn lause r-värityksillä

Käydään seuraavaksi läpi todistuksia 1 ja 2 vastaavat todistukset Ramseyn lauseelle 3.12 tapauksessa $r > 2$. Tehdään ensin todistus, joka on tehty mukaillen tapauksen $r = 2$ todistusta 1.

Todistus 1. Olkoon $A_i = R(l_1, ..., l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, ..., l_r)$, kun $i \in [r]$. Todistetaan lause induktiolla. Apulauseen 3.10 nojalla voidaan todeta, että luvut $R(l_1, l_2, 2, ..., 2)$, $R(2, l_2, l_3, 2, ..., 2)$, ..., $R(2, ..., 2, l_{r-1}, l_r)$ ovat olemassa, sillä Ramseyn lauseen 3.12 tapauksen $r = 2$ perusteella luvut $R(l', l'')$ ovat olemassa kaikilla $l', l'' \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että luvut A_i ovat olemassa.

Väite. $A_1 + ... + A_r \to (l_1, ..., l_r)$

Olkoon χ joukon $[n]^2$ r-väritys, kun $n = A_1 + ... + A_r$. Valitaan satunnainen $x \in [n]$. Olkoon

$$X_i = \{y \in [n] : y \neq x, \ \chi(x, y) = i\},$$

Tällöin $|X_1| + ... + |X_r| = n - 1$. Tästä seuraa, että $|X_i| \geq A_i$ jollain $i \in [r]$, sillä jos olisi $|X_i| < A_i$ kaikilla $i \in [r]$, eli $|X_i| \leq A_i - 1$, niin saataisiin

$$|X_1| + ... + |X_r| \leq (A_1 - 1) + ... + (A_r - 1) = A_1 + ... + A_r - r = n - r$$

Tämä on ristiriita, sillä $|X_1| + \ldots + |X_r| = n - 1$. Koska $|X_i| \geq A_i$ jollain $i \in [r]$, voidaan apulauseen 3.6 kohdan (ii) nojalla löytää joko joukko $T \subseteq X_i$ ja $j \in [r]$, $j \neq i$ siten, että $|T| = l_j$ ja $[T]^2$ on väriltään j jolloin määritelmän 3.5 ehto täyttyy tai on olemassa joukko S, $S \subseteq X_i$ siten, että $|S| = l_i - 1$ ja $[S]^2$ on väriltään i. Olkoon $S^* = S \cup \{x\}$. Koska $S \subseteq X_i$, kaikki alkiot $\{x, s\}$ ovat väriltään i, joten $[S^*]^2$ on yksivärinen ja $|S^*| = l_i$. Jälleen määritelmän 3.5 ehto täyttyy, joten $n \longrightarrow (l_1, \ldots, l_r)$ ja väite on todistettu. □

Huomautus 3.15. Valintaa $n = A_1 + \ldots + A_r$ voitaisiin parantaa vielä siten, että saataisiin $|X_1|+\ldots+|X_r| \leq n-2$, mikä tuottaisi ristiriidan yhtälön $|X_1|+\ldots+|X_r| = n-1$ kanssa. Yksinkertaisuuden vuoksi tässä tutkielmassa on kuitenkin päädytty valintaan $n = A_1 + \ldots + A_r$.

Ramseyn lause voidaan todistaa myös todistuksen 2 tavoin tapaukselle $r > 2$. Ennen todistusta muotoillaan kuitenkin apulausetta 3.14 vastaava toinen apulause lukujen ominaisuuksista, kun kantalukuna onkin $r > 2$.

Apulause 3.16. Olkoon $l \in \mathbb{N}$. Jos luvuille $x_i \in \mathbb{N}$, $i \leq (l-1)r + 1$ pätee $x_1 \geq r^{(l-1)r+1} - 1$ ja $x_{i+1} \geq (x_i - 1)/r$, niin tällöin $x_i \geq r^{(l-1)r+1-i} \geq 1$.

Todistus. Todistetaan apulause induktiolla luvun i suhteen. Oletuksen nojalla väite pätee selvästi kun $i = 1$, sillä

$$x_1 \geq r^{(l-1)r+1} - 1 \geq r^{(l-1)r} = r^{(l-1)r+1-1}.$$

Oletetaan, että väite pätee kun $i = k - 1$, eli $x_{k-1} \geq r^{(l-1)r+1-k+1} = r^{(l-1)r-k+2}$. Nyt oletuksen nojalla $x_k \geq (x_{k-1})/r$. Induktio-oletuksen nojalla saadaan

$$x_k \geq \frac{r^{(l-1)r-k+2} - 1}{r} = r^{(l-1)r-k+1} - \frac{1}{r}.$$

Nyt $r > 2$, joten $\frac{1}{r} < 1$. Koska $x_k \in \mathbb{N}$, voidaan päätellä, että $x_k \geq r^{(l-1)r+1-k}$. Huomataan vielä, että kun $i = (l-1)r + 1$, niin

$$x_i \geq r^{(l-1)r+1-i} = r^{(l-1)r+1-(l-1)r-1} = r^0 = 1,$$

joten väite on todistettu. □

Todistetaan Ramseyn lause 3.12 nyt tapaukselle $r > 2$ osoittamalla, että

$$r^{(l-1)r+1} - 1 \longrightarrow (l : r).$$

Todistus. Olkoon S_1 joukko, jolle $|S_1| \geq r^{(l-1)r+1} - 1$ ja χ joukon $[S_1]^2$ r-väritys. Valitaan x_1 satunnaisesti joukosta S_1. Määritellään joukot S_i ja alkiot $x_i \in S_i$ seuraavasti, kun $2 \leq i \leq (l-1)r + 1$:

(i) Kun S_i on valittu, valitaan satunnainen $x_i \in S_i$

(ii) Olkoon $T_c = \{u \in S_i : \chi(x_i, u) = c\}$, kun $c \in [r]$. Valitaan $a \in [r]$ siten, että $|T_a| \geq |T_b|$ kaikilla $b \in [r]$ ja asetetaan $S_{i+1} = T_a$. Joukko S_{i+1} on siis suurin joukoista T_c, kun $c \in [r]$.

Nyt $|T_1| + \cdots + |T_r| = |S_i| - 1$, joten $|S_{i+1}| \geq (|S_i| - 1)/r$. Koska $|S_1| \geq r^{(l-1)r+1} - 1$, voidaan apulauseen 3.16 nojalla päätellä, että $|S_i| \geq r^{(l-1)r+1-i}$ ja joukko $|S_i|$ on epätyhjä niin kauan kuin $i \leq (l-1)r + 1$. Voidaan siis valita alkiot $x_1, \ldots, x_{(l-1)r+1}$. Määritellään uusi väritys

$$\chi^* : \{x_1, \ldots, x_{(l-1)r+1}\} \to [r].$$

Kuvaus χ^* kertoo alkioiden $\{x_i, y\}$ värin, kun $y \in S_{i+1}$, koska joukkojen S_{i+1} määritelmän nojalla on olemassa $j \in [r]$ siten, että $\chi(x_i, y) = j$ kaikilla $y \in S_{i+1}$. Asetetaan siis $\chi^*(x_i) = j$. Koska väritys χ^* jakaa $(l-1)r + 1$ solmua ryhmiin, joita on yhteensä r kappaletta, voidaan löytää l pistettä $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ siten, että $\chi^*(x_{i_s}) = j$, kun $1 \leq s \leq l$. Olkoon $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\}$, missä $1 \leq s < t \leq l$. Tällöin $x_{i_t} \in S_{i_t} \subseteq S_{i_s+1}$ ja $\chi(\{x_{i_s}, x_{i_t}\}) = j$ kaikilla $x_{i_s}, x_{i_t} \in A$ ja selvästi $|A| = l$, joten A on haluttu yksivärinen joukko. □

3.3 Ramseyn lause joukolla $[n]^k$

Tähän mennessä olemme tarkastelleet värityksiä ja Ramseyn lausetta tapauksessa $[n]^2$. Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan joukon $[n]^k$, $k \in \mathbb{N}$ värityksiä, jolloin voimme yleistää määritelmän 3.5 ja lauseen 3.12 tapaukset, joissa $k = 2$.

Määritelmä 3.17. Merkitään $n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$, jos jokaiselle joukon $[n]^k$ r-väritykselle on olemassa $i \in [r]$ ja joukko T, $|T| = l_i$ siten, että $[T]^k$ on väriltään i. Kun $l_1 = \cdots = l_r = l$, merkitään $n \to (l)^k_r$, jos jokaisella joukon $[n]^k$ r-värityksellä löytyy yksivärinen joukko $[T]^k$, kun $|T| = l$.

Oletetaan, että $r = 2$, mikäli muuttujaa r ei ole ilmoitettu. Näin ollen merkinnät $n \to (l)^k$, $n \to (l)^k_2$ ja $n \to (l, l)^k$ ovat yhtäpitäviä.

Määritelmä 3.18. Määritellään Ramseyn funktio R_k k-joukoille seuraavasti:

$$\begin{aligned} R_k(l_1, \ldots, l_r) &= min\{n \in \mathbb{N} : n \to (l_1, \ldots, l_r)^k\} \\ R_k(l; r) &= min\{n \in \mathbb{N} : n \to (l)^k_r\} \\ R_k(l) &= min\{n \in \mathbb{N} : n \to (l)^k\} \end{aligned}$$

Huomautus 3.19. Edellisessä määritelmässä 3.18 käytetään samaa merkintää R_k kaikille kolmelle funktiolle. Tämä ei ole suotavaa, mutta vakiintuneen merkintätavan vuoksi käytämme kyseistä merkintää.

Ennen Ramseyn lauseen todistusta käydään läpi 2-värityksen yhteydessä todistetut trivialiteetit koskien relaatiota $n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$.

Apulause 3.20. (i) Jos $l_i' \leq l_i$, kun $i \in [r]$ ja $n \to (l_1, ..., l_r)^k$, niin $n \to (l_1', ..., l_r')^k$.

(ii) Jos $m \geq n$ ja $n \to (l_1, ..., l_r)^k$, niin $m \to (l_1, ..., l_r)^k$.

(iii) Olkoon σ joukon $[r]$ permutaatio. Tällöin $n \to (l_1, ..., l_r)^k$ joss $n \to (l_{\sigma 1}, ..., l_{\sigma r})^k$.

(iv) $n \to (l_1, ..., l_r)^k$ joss $n \to (l_1, ..., l_r, 2)^k$. Erityisesti $l_1 \to (l_1, 2)^k$.

Todistus. Todistukset sivuutetaan tässä tutkielmassa, mutta ne vastaavat tapauksen $k = 2$ todistuksia apulauseissa 3.6 ja 3.10. □

Jotta Ramseyn lause saataisiin todistettua yleistetyssä tapauksessa, tarvitaan apulause lukujen ominaisuuksista, jotta voimme määrittää riittävän suuren joukon, jolla relaatio $n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$ pätee.

Apulause 3.21. Olkoon $l \in \mathbb{N}$. Jos luvuille $x_i \in \mathbb{N}$, $i \leq t - (k-2)$ pätee $x_1 \geq \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)} - 1$ ja $x_{i+1} \geq (x_i - 1)/r^{t^k}$, niin tällöin $x_i \geq \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)-i} \geq 1$.

Todistus. Todistetaan apulause induktiolla luvun i suhteen. Oletuksen nojalla väite pätee selvästi kun $i = 1$, sillä

$$x_1 \geq \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)} \geq \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)-1}.$$

Oletetaan, että väite pätee kun $i = n - 1$ eli $x_{n-1} \geq \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)-(n-1)}$. Oletuksen nojalla $x_n \geq (x_{n-1} - 1)/r^{t^k}$, joten induktio-oletuksen nojalla saadaan

$$x_n \geq \frac{x_{n-1} - 1}{r^{t^k}} \geq \frac{\left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)-(n-1)} - 1}{r^{t^k}} = \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)-n} - \frac{1}{r^{t^k}}.$$

Koska $x_i \in \mathbb{N}$ ja $\frac{1}{r^{t^k}} < 0$, voidaan päätellä, että $x_n \geq \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)-n}$. Huomataan vielä, että kun $n \leq t - (k-2)$, niin

$$x_n \geq \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)-n} \geq \left(r^{t^k}\right)^0 = 1,$$

joten väite on todistettu. □

Nyt voimme todistaa Ramseyn lauseen yleisessä tapauksessa.

Lause 3.22. *Funktio R on hyvin määritelty: kaikille $k, l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että kun $n \geq n_0$, niin $n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$.*

Todistus. Todistus mukailee lauseen 3.12 todistusta 2. Todistetaan lause induktiolla luvun k suhteen. Kun $k = 1$ ja $i \in [r]$, väite on triviaali:

$$1 + \sum_{i=1}^{r}(l_i - 1) \to (l_1, \dots, l_r)^1,$$

sillä jos $n \geq 1 + \sum_{i=1}^{r}(l_i - 1)$ ja solmut väritetään r värillä, on jotain väriä käytettävä kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla l_i kertaa. Tapaus $k = 2$ on todistettu jo aiemmin. Oletetaan siis, että väite pätee tapauksessa $k - 1$, missä $k > 2$. Riittää siis löytää n siten, että $n \to (l)_r^k$, kun $l = max\{l_1, \dots, l_r\}$, sillä lemman 3.20 kohdan (i) nojalla $n \to (l_1, \dots, l_r)$. Olkoon $n = \left(r^{t^k}\right) - 1 + (k-2)$ ja χ joukon $[n]^k$ r-väritys. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa $t \in \mathbb{N}$ siten, että $t = R_{k-1}(l; r)$. Valitaan satunnaisesti eri alkiot $a_1, \dots, a_{k-2} \in [n]$ ja määritellään $S_{k-2} = [n] \setminus A_{k-2}$, kun $A_{k-2} = \{a_1, ..., a_{k-2}\}$. Valitaan nyt a_i, S_i seuraavasti:

(i) kun S_i on määritelty, valitaan mielivaltainen $a_{i+1} \in S_i$

(ii) kun a_{i+1} on valittu, jaetaan joukko $S_i \setminus \{a_{i+1}\}$ ekvivalenssiluokkiin: $x \equiv y$ jos ja vain jos kaikilla joukoilla T, joille $T \subseteq [A_{i+1}]^{k-1}$ pätee, että $\chi(T \cup \{x\}) = \chi(T \cup \{y\})$

Nyt $|[A_{i+1}]^{k-1}| = \begin{pmatrix} i+1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, joten ekvivalenssiluokkia on korkeintaan $r^{\binom{i+1}{k-1}}$ kappaletta. Olkoon S_{i+1} suurin näistä luokista. Tällöin $S_{i+1} \subseteq S_i \setminus \{a_{i+1}\}$ ja $|S_{i+1}| \geq (|S_i| - 1)r^{-\binom{i+1}{k-1}}$. Koska $\binom{i+1}{k-1} < (i+1)^{k-1}$, huomataan että kun $i + 1 \leq t$, niin

$$|S_{i+1}| \geq \frac{(|S_i| - 1)}{r^{\binom{i+1}{k-1}}} \geq \frac{(|S_i| - 1)}{r^{(i+1)^{k-1}}} \geq \frac{(|S_i| - 1)}{r^{(i+1)^k}} \geq \frac{(|S_i| - 1)}{r^{t^k}}.$$

Nyt myös $|S_{k-2}| = \left(r^{t^k}\right) - 1$, joten apulauseen 3.21 nojalla voidaan päätellä, että $|S_i| \geq \left(r^{t^k}\right)^{t-(k-2)-i} \geq 1$ ja joukko S_i on epätyhjä niin kauan kun $i \leq t - (k-2)$. Voidaan siis valita alkiot $a_1, \dots, a_t$. Oletetaan, että $i \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} < s \leq t$. Tällöin joukkojen S_i ja alkioiden a_i määritelmien nojalla $a_s \in S_{s-1} \subseteq S_{i_{k-1}+1}$. Ekvivalenssiluokkien määritelmän nojalla väri $\chi(\{a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}, a_s\})$ ei muutu, vaikka a_s korvataan millä tahansa alkiolla $x \in S_{i_{k-1}+1}$, mukaan lukien silloin, kun $x = a_r$, $k - 1 < r < t$. Olkoon χ^* joukon $\{a_1, \dots, a_t\}$ $k-1$-osajoukkojen väritys:

$$\chi^*(\{a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}\}) = \chi(\{a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}, a_s\})$$

kaikilla $i_{k-1} < s \leq t$. Kun $i_{k-1} = t$, määritellään χ^* mielivaltaisesti. Koska aikaisemmin määriteltiin $t = R_{k-1}(l; r)$, on funktion R määritelmän nojalla olemassa joukko $B = \{b_1, \dots, b_l\} \subseteq \{a_1, \dots, a_t\}$ siten, että B on yksivärinen kuvauksen χ^*suhteen. Tällöin kaikilla $1 \leq j_1 < \cdots < j_{k-1} < j_k \leq l$,

$$\chi(\{b_{j_1}, \dots, b_{j_{k-1}}, b_{j_k}\}) = \chi^*(\{b_{j_1}, \dots, b_{j_{k-1}}\}),$$

joten $\{b_1, \dots, b_l\}$ on haluttu yksivärinen l-joukko ja väite on todistettu.

□

Huomautus 3.23. Todistuksessa käytettiin luvulle n hyvin korkeaa arviota $n = \binom{r^{t^k}}{} - 1 + (k-2)$. Olisi mahdollista löytää $n' \in \mathbb{N}$ siten, että $n' < n$ ja lause 3.22 toteutuu, mutta todistuksen helpottamiseksi päädyttiin edellä mainittuun lukuun $n = \binom{r^{t^k}}{} - 1 + (k-2)$. Tällainen luku n' olisi esimerkiksi $n' = 2r^c$, missä $c = \sum_{i=k-1}^{t-1} \binom{i+1}{k-1}$. Tämä valinta on esitetty teoksessa [2].

4 Ramseyn luvut

Yksi mielenkiintoisista osa-alueista Ramseyn teoriassa on Ramseyn lukujen tutkiminen. Selvästi $R(l, 1) = 1$ kaikilla $l \in \mathbb{N}$ ja apulauseen 3.10 kohdan (ii) nojalla $R(l, 2) = 2$ kaikilla $l \in \mathbb{N}$. Tarkkojen Ramseyn lukujen $R(l_1, l_2)$ löytäminen ja niiden todistaminen, kun $l_1, l_2 > 2$, on hyvin hankalaa yksinkertaisimpia tapauksia lukuunottamatta ja tähän mennessä epätriviaaleja Ramseyn lukuja 2-värityksille onkin löydetty vain yhdeksän kappaletta. Tunnetuin näistä luvuista on $R(3, 3) = 6$. Tapausta käsiteltiin jo esimerkissä 3.1, jossa todistettiin, että $6 \longrightarrow (3, 3)$. Tämän nojalla voidaan kuitenkin vasta päätellä, että $R(3, 3) \leq 6$. Alarajoja Ramseyn luvuille etsiessä voidaan hyödyntää vastaesimerkkejä. Mikäli on mahdollista muodostaa sellainen n-solmuinen verkko, jolla $n \nrightarrow (l_1, ...l_r)$, voidaan todeta, että $R(l_1, ..., l_r) > n$. Todistetaan seuraavaksi, että $R(3, 3) = 6$.

Esimerkki 4.1. Tutkitaan verkkoa $G(V, E)$, jossa $|V| = 5$, $V = \{a, b, c, d, e\}$ ja $E = \big\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\big\}$. Verkkoa on havainnollistettu kuvassa 4.1. Kuvan avulla voidaan helposti todeta, että ei ole olemassa sellaisia solmuja $x, y, z \in V$, $V^* = \{x, y, z\}$ siten, että joko $[V^*]^2 \subseteq E$ tai $([V]^2 \setminus [V^*]^2) \subseteq E$. Tällöin siis $5 \nrightarrow (3, 3) \Leftrightarrow R(3, 3) > 5$. Koska esimerkin 3.1 nojalla tiedetään, että $R(3, 3) \leq 6$, voidaan nyt päätellä, että $R(3, 3) = 6$.

Käydään seuraavaksi läpi esimerkki, joka osoittaa, että Ramseyn luku $R(3, 4)$ on yhdeksän.

Esimerkki 4.2. Osoitetaan, että $R(3, 4) = 9$. Todistetaan ensin, että $9 \longrightarrow (3, 4)$. Olkoon $\chi : [9] \longrightarrow [2]$. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla saadaan, että joko

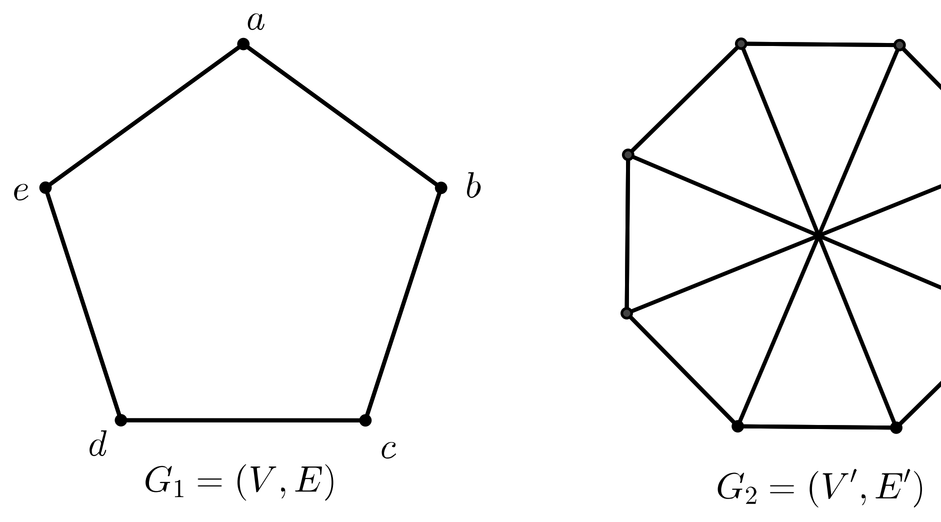
(i) $|X_1| = |\{y \in [9] : \chi(\{x, y\}) = 1, x \neq y\}| \geq 4$ jollain $x \in [9]$ tai

(ii) $|X_2| = |\{y \in [9] : \chi(\{x, y\}) = 2, x \neq y\}| \geq 5$ kaikilla $x \in [9]$.

Oletetaan ensin, että (i) pätee ja valitaan alkiot $y_1, ..., y_4 \in X_i$. Muodostetaan joukko $T_1 = \{x, y_i, y_j\}$, jos on olemassa alkiot y_i, y_j, missä $i \neq j$, $i, j \in [4]$ siten, että $\chi(\{y_i, y_j\}) = 1$. Tällöin joukolle T_1 pätee, että $T_1 = 3$ ja T_1 on väriltään 1 ja määritelmän 3.5 ehto täyttyy. Olkoon sitten $T_2 = \{y_1, ..., y_4\}$. Jos $\chi(\{y_i, y_j\}) \neq 1$ eli $\chi(\{y_i, y_j\}) = 2$ kaikilla $i, j \in [4]$, $i \neq j$, niin tällöin $|T_2| = 4$ ja T_2 on väriltään 2. Jälleen määritelmän 3.5 ehto täyttyy.

Oletetaan sitten, että (ii) pätee. Seurauksen 2.8 perusteella voidaan päätellä, että on olemassa $x \in [9]$ siten, että $|X_2| = 2n$ jollain $n \in \mathbb{N}$, jolloin oletuksen nojalla $|X_2| \geq 6$. Valitaan alkiot $y_1, ..., y_6 \in X_2$ ja tarkastellaan tätä joukkoa $T = \{y_1, ..., y_6\}$. Esimerkin 3.1 nojalla on olemassa $T' \subseteq T$ ja $i \in [2]$ siten, että $|T| = 3$ ja T on väriltään i. Jos $i = 1$, niin määritelmän 3.5 ehto täyttyy. Oletetaan sitten, että $i = 2$ ja merkitään $T' = \{y_1', y_2', y_3'\}$. Määritellään uusi joukko $T'' = \{x, y_1', y_2', y_3'\}$, jolloin $|T''| = 4$ ja T'' on väriltään 2. Jälleen määritelmän 3.5 ehhto täyttyy, joten $9 \longrightarrow (3, 4) \Leftrightarrow R(3, 4) \leq 9$.

Osoitetaan vielä, että $R(3, 4) > 8$ muodostamalla sellainen kahdeksan solmun verkko, joka osoittaa, että $8 \nrightarrow (3, 4)$. Tällainen verkko on esitetty kuvassa 4.1.



Kuva 4.1: Verkot G, $R(3,3) > 5$ ja G', $R(3,4) > 8$

Kuvan verkko $G' = (V', E')$ ei sisällä sellaista kolmen solmun joukkoa, jossa kaikkien solmujen välillä olisi särmä, eikä myöskään sellaista neljän solmun joukkoa, jossa minkään solmujen välillä ei olisi särmää. Näin ollen $R(3,4) > 8$, joten $R(3,4) = 9$.

4.1 Ramseyn lukujen arviointi

Vaikka Ramseyn lukujen löytäminen ja arvioiminen on hyvin hankalaa, on tietokonealgoritmien avulla pystytty viimeisten kolmen vuosikymmenen aikana löytämään parempia arvioita Ramseyn luvuille [3]. Taulukossa 4.1 on kuvattu tähän mennessä löytyneet Ramseyn luvut, sekä ylä- ja alarajoja vielä tuntemattomille Ramseyn luvuille 2-värityksillä. Taulukon merkintä $n - m$ vastaa lukuja $n, m \in \mathbb{N}$, joille $n \leq R(l_1, l_2) \leq m$. Taulukko on poimittu artikkelista Small Ramsey Numbers [3], jota päivitetään aina löydettäessä uusia Ramseyn lukuja tai arvioita luvuille.

Taulukosta voi huomata, että jo lukujen $R(4,6)$ ja $R(5,5)$ arviointi on hyvin hankalaa. Ramseyn lukuja voidaan arvioida esimerkiksi tässäkin tutkielmassa läpikäytyjen Ramseyn lauseen todistusten avulla. Tutkitaan seuraavaksi Ramseyn lukuja sellaisilla verkoilla, joihin on liitetty 2-väritys.

Esimerkki 4.3. Koska Ramseyn lauseen 3.12 todistuksen 1 ja huomautuksen 3.13 nojalla $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \geq R(l_1, l_2)$, voimme rekursiivisesti löytää seuraavien esimerkkien mukaiset arviot.

(a) Olkoon $l_1 = 3$ ja $l_2 = 3$. Koska $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \geq R(l_1, l_2)$, saadaan $R(3,2) + R(2,3) \geq R(3,3)$. Apulauseen 3.10 nojalla $R(3,2) = 3$ ja $R(2,3) = 3$, joten $R(3,3) \leq 3 + 3 = 6$.

$\frac{l_1}{l_2}$	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	6	9	14	18	23	28	36	40 – 42
4		18	25	36 – 41	49 – 61	59 – 84	73 – 115	92 – 149
5			43 – 48	58 – 87	80 – 143	101 – 216	133 – 316	149 – 442
6				102 – 165	115 – 298	134 – 495	183 – 780	204–1171

Taulukko 4.1: Ramseyn lukuja ja arvioita kun $r = 2$

(b) Olkoon $l_1 = 4$ ja $l_2 = 5$. Kohdan (a) tavoin saadaan $R(4,4) + R(3,5) \geq R(4,5)$. Tutkitaan ensin lukua $R(4,4)$. Edelleen voimme päätellä, että $R(4,3)+R(3,4) \geq R(4,4)$. Apulauseen 3.10 kohdan (i) nojalla $R(4,3) = R(3,4)$, joten riittää tutkia lukua $R(3,4)$. Nyt $R(3,3) + R(2,4) \geq R(3,4)$. Esimerkin 3.1 perusteella $R(3,3) = 6$ ja apulauseen 3.10 kohdan (ii) perusteella $R(2,4) = 4$, jolloin saadaan $R(3,4) \leq 6 + 4 = 10$. Koska $R(4,3) = R(3,4) \leq 10$ ja $R(4,3) + R(3,4) \geq R(4,4)$, voidaan siis päätellä, että $R(4,4) \leq 10 + 10 = 20$. Tutkitaan sitten lukua $R(3,5)$, jolle pätee $R(3,4) + R(2,5) \geq R(3,5)$. Nyt $R(3,4) \leq 10$ ja $R(2,5) = 5$, joten $R(3,5) \leq 10 + 5 = 15$. Voimme siis päätellä, että

$$\begin{aligned} R(4,5) &\leq R(4,4) + R(3,5) \\ &\leq 20 + 15 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Kaavan $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \geq R(l_1, l_2)$ avulla voidaan löytää siis ylärajat Ramseyn luvuille $R(l_1, l_2)$. Esimerkin 3.1 nojalla voidaan huomata, että tapauksessa $l_1 = 3, l_2 = 3$ edellisen esimerkin kohdassa (a) arvioimalla löydetty luku $n = 6$ olikin itseasiassa Ramseyn luku $R(3,3) = 6$. Käydään seuraavaksi läpi, miten väite $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \geq R(l_1, l_2)$ saadaan tietyin ehdoin vielä hieman paremmaksi.

Apulause 4.4. Jos $R(l_1, l_2 - 1) = 2m$ ja $R(l_1 - 1, l_2) = 2m'$ jollain $m, m' \in \mathbb{N}$, niin tällöin

$$R(l_1, l_2) < R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2).$$

Todistus. Olkoon siis $R(l_1, l_2 - 1) = 2m$ ja $R(l_1 - 1, l_2) = 2m'$ jollain $m, m' \in \mathbb{N}$ ja tehdään vastaoletus, että $R(l_1, l_2) \geq R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2)$, jolloin $R(l_1, l_2) > R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) - 1$. Olkoon $n = R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) - 1$ ja $x \in [n]$, $i \in [2]$ ja määritellään

$$A_{x,i} = \{y \in [n] : \chi(\{x, y\}) = i, x \neq y\}.$$

Koska vastaoletuksen nojalla $R(l_1, l_2) > n$, on olemassa sellainen joukon $[n]^2$ 2-väritys χ, jolla ei ole olemassa sellaista alkiota $i \in [2]$ ja joukkoa $T_i \subseteq [n]$ siten, että $|T_i| = l_i$ ja T on väriltään i. Tällöin on oltava $|A_{x,1}| = R(l_1 - 1, l_2) - 1$ ja $|A_{x,2}| = R(l_1, l_2 - 1) - 1$ kaikilla $x \in [n]$, sillä muutoin tällainen joukko T_i löytyisi. Nyt

$$\left|\left\{\{x, y\} \in [n]^2 : \chi(\{x, y\}) = 1\right\}\right| = \frac{n(R(l_1 - 1, l_2) - 1)}{2} \in \mathbb{N} \text{ ja}$$
$$\left|\left\{\{x, y\} \in [n]^2 : \chi(\{x, y\}) = 2\right\}\right| = \frac{n(R(l_1, l_2 - 1) - 1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä $\frac{n(R(l_1-1,l_2)-1)}{2}, \frac{n(R(l_1,l_2-1)-1)}{2} \notin \mathbb{N}$, koska määritelmien nojalla $R(l_1, l_2 - 1) = 2m$, $R(l_1 - 1, l_2) = 2m'$, $n = 2m'' + 1$ jollain $m, m', m'' \in \mathbb{N}$. Siis vastaoletus oli väärä, joten $R(l_1, l_2) < R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2)$, kun $R(l_1, l_2 - 1) = 2m$ ja $R(l_1 - 1, l_2) = 2m'$ jollain $m, m' \in \mathbb{N}$.

□

Tutkitaan seuraavaksi esimerkin 4.3 tapausten arvioita Ramseyn luvuille Ramseyn lauseen 3.12 todistuksen 2 avulla, jonka perusteella $2^{2l-1} - 1 \to (l)$.

Esimerkki 4.5. (a) Olkoon $l_1 = 3$ ja $l_2 = 3$, jolloin $l = max\{l_1, l_2\} = 3$. Nyt

$$2^{2l-1} - 1 \to (l) \Leftrightarrow 2^{2\cdot 3-1} - 1 \to (3) \Leftrightarrow 31 \to (3).$$

(b) Olkoon $l_1 = 4$ ja $l_2 = 5$, jolloin $l = max\{l_1, l_2\} = 5$. Tällöin

$$2^{2l-1} - 1 \to (l) \Leftrightarrow 2^{2\cdot 5-1} - 1 \to (5) \Leftrightarrow 511 \to (5).$$

Huomataan, että edellisessä esimerkissä löydetyt luvut $n_a = 31$ ja $n_b = 511$ eroavat huomattavasti esimerkissä 4.3 löydetyistä luvuista $n'_a = 6$ ja $n'_b = 35$. Todistuksen 2 väitteen $2^{2l-1} - 1 \to (l)$ avulla löydetään siis huonommat arviot Ramseyn luvuille $R(l_1, l_2)$, mutta toisaalta arvion laskeminen on huomattavasti helpompaa kuin rekursiivisesti todistuksen 1 kaavan $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \to (l_1, l_2)$ avulla.

Siirryttäessä värityksiin, joissa $r > 2$, Ramseyn lukujen etsiminen vaikeutuu entisestään. Värityksille, joissa $r > 2$, on löydetty tähän mennessä vain yksi epätriviaali Ramseyn luku $R(3, 3, 3) = 17$, mutta myös tässä tapauksessa jo aikaisemmin läpikäytyjen Ramseyn lauseen todistusten avulla voidaan löytää luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että $R_k(l_1, ..., l_r) \leq n$. Havainnollistetaan tätä esimerkin avulla.

Esimerkki 4.6. Olkoon $l_1 = 3$, $l_2 = 3$ ja $l_3 = 4$.

(a) Etsitään yläraja Ramseyn luvulle $R(3, 3, 4)$ lauseen 3.12 tapauksen $r > 2$ todistuksen 1 avulla, jonka mukaan

$$R(l_1 - 1, l_2, l_3) + R(l_1, l_2 - 1, l_3) + R(l_1, l_2, l_3 - 1) \to (l_1, l_2, l_3).$$

Voidaan siis päätellä, että

$$R(2, 3, 4) + R(3, 2, 4) + R(3, 3, 3) \to (3, 3, 4).$$

Tutkitaan ensin lukuja $R(2,3,4)$ ja $R(3,2,4)$. Apulauseen 3.10 kohdan (i) nojalla saadaan $R(2,3,4) = R(3,2,4) = R(3,4,2)$. Saman apulauseen kohdan (ii) nojalla voidaan päätellä, että $n \longrightarrow (3,4,2) \Leftrightarrow n \longrightarrow (3,4)$. Esimerkin 4.3 perusteella tiedetään, että $10 \longrightarrow (3,4)$, jolloin $R(2,3,4), R(3,2,4) \leq 10$. Tutkitaan sitten lukua $R(3,3,3)$. Nyt

$$R(2,3,3) + R(3,2,3) + R(3,3,2) \longrightarrow (3,3,3),$$

ja apulauseen 3.10 kohdan (i) nojalla voidaan päätellä, että

$$R(2,3,3) = R(3,2,3) = R(3,3,2).$$

Edelleen saman apulauseen kohdan (ii) perusteella saadaan $R(3,3,2) = R(3,3)$. Esimerkistä 3.1 tiedetään, että $R(3,3) = 6$, jolloin $R(3,3,3) \leq 6 + 6 + 6 = 18$. Koska aikaisemmin todettiin, että $R(2,3,4), R(3,2,4) \leq 10$, saadaan

$$\begin{aligned} R(3,3,4) &\leq R(2,3,4) + R(3,2,4) + R(3,3,3) \\ &\leq 18 + 10 + 10 \\ &= 38 \end{aligned}$$

(b) Etsitään yläraja Ramseyn luvulle R(3,3,4) todistuksen 2 avulla, jonka mukaan $r^{(l-1)r+1} - 1 \longrightarrow (l : r)$, missä $l = max\{l_1, l_2, l_3\}$. Apulauseen 3.6 kohdan (i) nojalla $r^{(l-1)r+1} - 1 \longrightarrow (l : r) \Leftrightarrow r^{(l-1)r+1} - 1 \longrightarrow (l_1, l_2, l_3)$. Nyt $r = 3$ ja $l = 4$, joten

$$3^{(4-1)3+1} - 1 \longrightarrow (3,3,4) \Leftrightarrow 3^{10} - 1 \longrightarrow (3,3,4) \Leftrightarrow 59048 \longrightarrow (3,3,4)$$

Kuten esimerkkien 4.3 ja 4.5 tapauksissakin todettiin, tuottaa rekursiivinen todistuksen 1 avulla tehty arvio ylärajasta Ramseyn luvulle huomattavasti tarkemman arvion kuin todistuksen 2 perusteella saatu yläraja, mutta todistuksen 2 kaavan $r^{(l-1)r+1} - 1 \longrightarrow (l : r)$ avulla arviointi on huomattavasti helpompaa.

Viitteet

[1] Diestel, R. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag, 2000.

[2] Graham, R. L., Rotschild, B. L., Spencer, J. H. *Ramsey Theory*. Wiley-Interscience, 1990.

[3] Radziszowski, S. P. (2017) *Small Ramsey Numbers*. *The Electronic Journal of Combinatorics*.
http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/viewFile/DS1/pdf. Viitattu 14.5.2017.

[4] Rosen, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, 2012.

[5] Ross, K. A., Wright, C. R. B. *Discrete Mathematics*. Prentice Hall, 1988.

[6] Rosta, V. (2004) *Ramsey Theory Applications*. *The Electronic Journal of Combinatorics*.
http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS13/pdf. Viitattu 14.5.2017.

[7] Xiong, B., Zheng, Z. *Graph Theory*. World Scientific, 2010.